

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
08.02.2026
CLASA a XII-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: - Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului precizat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu.

Subiectul I (20 puncte)

Să se arate că

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} (1-x)^2 \cdot e^{-x}, & x \in (-\infty, 1] \\ \frac{\ln^2 x}{x}, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

admite primitive pe \mathbb{R} și să se determine primitiva F care verifică relația

$$F(e) + F(0) = \frac{-2(e+3)}{3e}.$$

Soluție:

Funcția f este continuă pe $(-\infty, 1)$ și $(1, +\infty)$.

Limitele laterale și valoarea funcției în punctul $x = 1$ sunt egale cu 0, deci funcția f este continuă pe \mathbb{R} , prin urmare admite primitive pe \mathbb{R} .

O primitivă a funcției f este de forma $F(x) = \begin{cases} F_1(x) + c_1, & x \leq 1 \\ F_2(x) + c_2, & x > 1 \end{cases}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, unde

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int (1-x)^2 e^{-x} dx = - \int (1-x)^2 (e^{-x})' dx = \\ &= -(1-x)^2 e^{-x} + 2 \int (1-x) (e^{-x})' dx = -(1-x)^2 e^{-x} + 2(1-x)e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx = \\ &= -e^{-x}(x^2 + 1) + c_1 \end{aligned}$$

$$\text{iar } F_2(x) = \int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{\ln^3 x}{3} + c_2$$

Rezultă

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-x}(x^2 + 1) + c_1, & x \leq 1 \\ \frac{\ln^3 x}{3} + c_2, & x > 1 \end{cases}$$

Din continuitatea funcției F în $x = 1$ rezultă $-2e^{-1} + c_1 = c_2$. Pentru $c_2 = c$ rezultă

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-x}(x^2 + 1) + \frac{2}{e} + c, & x \leq 1 \\ \frac{\ln^3 x}{3} + c, & x > 1 \end{cases}$$

Din condiția

$$F(e) + F(0) = \frac{-2(e + 3)}{3e}$$

$$\text{rezultă } c = -\frac{2}{e}$$

Deci

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-x}(x^2 + 1), & x \leq 1 \\ \frac{\ln^3 x}{3} - \frac{2}{e}, & x > 1 \end{cases}$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Funcția f admite primitive pe \mathbb{R}	3p
$F_1(x) = \int (1 - x)^2 e^{-x} dx = -e^{-x}(x^2 + 1) + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$	4p
$F_2(x) = \int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{\ln^3 x}{3} + c_2, c_2 \in \mathbb{R}$	4p
Deduce $-2e^{-1} + c_1 = c_2$	4p
$c = -\frac{2}{e}$	4p
Finalizare	1p
Total	20p

Subiectul II (20 puncte)

Fie (G, \cdot) un grup multiplicativ cu elementul neutru $e \in G$. Dacă $a, b \in G$ cu proprietățile $a^3 = e$ și $a^2ba^{-2} = b^4$, arătați că $b^{63} = e$.

Soluție:

$$\begin{aligned}
 a^2ba^{-2} = b^4 &\Rightarrow a^2b = b^4a^2 \Rightarrow a^3b = ab^4a^2 \Rightarrow b = ab^4a^2 \Rightarrow ba = ab^4 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow b^2a = bba = b(ba) = b(ab^4) = (ba)b^4 = ab^4b^4 = ab^8 \Rightarrow \\
 b^4a = ab^{16} &\Rightarrow b^8a = ab^{32} \Rightarrow b^{16}a = ab^{64} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow a(b^{16}a) = a^2b^{64} \Rightarrow (ab^{16})a = a^2b^{64} \Rightarrow (b^4a)a = a^2b^{64} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow b^4a^2 = a^2b^{64} \Rightarrow a^2b = a^2b^{64} \Rightarrow b = b^{64} \Rightarrow b^{63} = e
 \end{aligned}$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
$a^2ba^{-2} = b^4 \Rightarrow a^2b = b^4a^2 \Rightarrow a^3b = ab^4a^2 \Rightarrow b = ab^4a^2 \Rightarrow ba = ab^4 \Rightarrow$	6p
$\Rightarrow b^2a = bba = b(ba) = b(ab^4) = (ba)b^4 = ab^4b^4 = ab^8 \Rightarrow$	6p
$b^4a = ab^{16} \Rightarrow b^8a = ab^{32} \Rightarrow b^{16}a = ab^{64} \Rightarrow$	3p
$\Rightarrow a(b^{16}a) = a^2b^{64} \Rightarrow (ab^{16})a = a^2b^{64} \Rightarrow (b^4a)a = a^2b^{64} \Rightarrow$ $\Rightarrow b^4a^2 = a^2b^{64} \Rightarrow a^2b = a^2b^{64} \Rightarrow b = b^{64} \Rightarrow b^{63} = e$	5p
Total	20p

Subiectul III (25 puncte)

Se consideră mulțimea $M = (-\infty, 1)$. Pentru fiecare pereche $(x, y) \in M \times M$ notăm cu

$$x \circ y = \frac{2025 - xy}{2026 - x - y}.$$

a) Arătați că funcția $(x, y) \rightarrow x \circ y$ definește o lege de compoziție pe M .

b) Demonstrați că legea de compoziție " \circ " este comutativă și asociativă, dar nu are element neutru.

Soluție:

a) Funcția $(x, y) \rightarrow x \circ y$ definește o lege de compoziție pe M dacă

$$(\forall)x, y \in M \Rightarrow x \circ y \in M$$

$$\text{Fie } x, y \in (-\infty, 1) \Rightarrow x + y < 2 < 2026 \Rightarrow 2026 - x - y > 0$$

$$\text{Vrem să arătăm că } x \circ y = \frac{2025 - xy}{2026 - x - y} < 1 \Leftrightarrow 2025 - xy < 2026 - x - y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - x - y + xy = (x - 1)(y - 1) > 0, (\forall)x, y \in M$$

b) Legea de compoziție este comutativă, dacă $\forall x, y \in M \Rightarrow x \circ y = y \circ x$

$$x \circ y = \frac{2025 - xy}{2026 - x - y} = \frac{2025 - yx}{2026 - yx} = y \circ x, (\forall)x, y \in (-\infty, 1)$$

Legea de compoziție este asociativă, dacă $\forall x, y, z \in M \Rightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = \frac{2025 \cdot 2026 - 2025(x + y + z) + xyz}{2026^2 - 2025 - 2026 \cdot (x + y + z) + xy + yz + xz}$$

Legea de compoziție are element neutru, dacă $\exists e \in M$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x, (\forall)x \in M$.

Se verifică dacă există $e \in (-\infty, 1)$ astfel încât $x \circ e = x$

$$\frac{2025 - xe}{2026 - x - e} = x \Leftrightarrow x^2 - 2026x + 2025 = 0$$

$$\text{Dar } x^2 - 2026x + 2025 \neq 0, (\forall)x \in (-\infty, 1)$$

Legea de compoziție nu are element neutru.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
<p>a) Funcția $(x, y) \rightarrow x \circ y$ definește o lege de compoziție pe M dacă</p> $(\forall)x, y \in M \Rightarrow x \circ y \in M$ <p>Fie $x, y \in (-\infty, 1) \Rightarrow x + y < 2 < 2026 \Rightarrow 2026 - x - y > 0$</p>	7p
<p>Vrem să arătăm că $x \circ y = \frac{2025 - xy}{2026 - x - y} < 1 \Leftrightarrow 2025 - xy < 2026 - x - y \Leftrightarrow$</p> $\Leftrightarrow 1 - x - y + xy = (x - 1)(y - 1) > 0, (\forall)x, y \in M$	4p
<p>b) Legea de compoziție este comutativă, dacă $\forall x, y \in M \Rightarrow x \circ y = y \circ x$</p> $x \circ y = \frac{2025 - xy}{2026 - x - y} = \frac{2025 - yx}{2026 - yx} = y \circ x, (\forall)x, y \in (-\infty, 1)$	3p
<p>Legea de compoziție este asociativă, dacă $\forall x, y, z \in M \Rightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$</p> $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = \frac{2025 \cdot 2026 - 2025(x + y + z) + xyz}{2026^2 - 2025 - 2026 \cdot (x + y + z) + xy + yz + xz}$	4p
<p>Legea de compoziție are element neutru, dacă $\exists e \in M$ astfel încât</p> $x \circ e = e \circ x = x, (\forall)x \in M.$ <p>Se verifică dacă există $e \in (-\infty, 1)$ astfel încât $x \circ e = x$</p> $\frac{2025 - xe}{2026 - x - e} = x \Leftrightarrow x^2 - 2026x + 2025 = 0$ <p>Dar $x^2 - 2026x + 2025 \neq 0, (\forall)x \in (-\infty, 1)$</p> <p>Legea de compoziție nu are element neutru.</p>	7p
Total	25p

Subiectul IV (25 puncte)

Determinați $\int \frac{x^2 - x - 1}{(x^2 + x + 1)^3} dx$, unde $x > 0$.

Soluție:

$$\int \frac{x^2 - x - 1}{(x^2 + x + 1)^3} dx = \int \frac{x^2 - x - 1}{\left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right]^3} dx$$

Făcând schimbarea de variabilă $t = x + \frac{1}{2}$, $dt = dx$, $x = t - \frac{1}{2}$,

integrala din enunț devine $\int \frac{t^2 - 2t - \frac{1}{4}}{\left(t^2 + \frac{3}{4} \right)^3} dt$

$$\text{Observăm că } \left(\frac{t}{\left(t^2 + \frac{3}{4} \right)^2} \right)' = \frac{-3t^2 + \frac{3}{4}}{\left(t^2 + \frac{3}{4} \right)^3} = -3 \cdot \frac{t^2 - \frac{1}{4}}{\left(t^2 + \frac{3}{4} \right)^3},$$

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 - 2t - \frac{1}{4}}{\left(t^2 + \frac{3}{4} \right)^3} dt &= \int \frac{t^2 - \frac{1}{4}}{\left(t^2 + \frac{3}{4} \right)^3} dt - \int \frac{2t}{\left(t^2 + \frac{3}{4} \right)^3} dt = \\ &= -\frac{1}{3} \int \left(\frac{t}{\left(t^2 + \frac{3}{4} \right)^2} \right)' dt - \int \frac{\left(t^2 + \frac{3}{4} \right)'}{\left(t^2 + \frac{3}{4} \right)^3} dt = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{t}{\left(t^2 + \frac{3}{4} \right)^2} + \frac{\left(t^2 + \frac{3}{4} \right)^{-2}}{2} = \frac{-2t + 3}{6 \left(t^2 + \frac{3}{4} \right)^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Deci

$$\int \frac{x^2 - x - 1}{(x^2 + x + 1)^3} dx = \frac{-2x + 1}{6(x^2 + x + 1)^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Ajunge la $I = \int \frac{t^2 - 2t - \frac{1}{4}}{\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)^3} dt$	5p
Observă $\left(\frac{t}{\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)^2} \right)' = \frac{-3t^2 + \frac{3}{4}}{\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)^3} = -3 \cdot \frac{t^2 - \frac{1}{4}}{\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)^3}$	5p
Scrie $\int \frac{t^2 - 2t - \frac{1}{4}}{\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)^3} dt = \int \frac{t^2 - \frac{1}{4}}{\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)^3} dt - \int \frac{2t}{\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)^3} dt$	5p
Calculează $\int \frac{t^2 - \frac{1}{4}}{\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)^3} dt$	4p
Calculează $\int \frac{2t}{\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)^3} dt$	4p
Finalizare $\int \frac{x^2 - x - 1}{(x^2 + x + 1)^3} dx = \frac{-2x + 1}{6(x^2 + x + 1)^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$	2p
Total	25p